DISSERTATIO
INAUGURALIS MATHEMATICA

QUAM

CONSENSU ET AUCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN

ALMA LITERARUM UNIVERSITATE
GRYPHISWALDENSI

AD SUMMOS

IN PHILOSOPHIA HONORES

RITE IMPETRANDOS

DIE X. MENS. MAII ANNI MDCCCLXVII

UNA CUM SENTENTIIS CONTROVERSIS

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

IGNATIUS PACZKOWSKI,

POSNANIENSIS.

ADVERSARII ERUNT:

TH. SUMIŃSKI, DR. MED.
A. HEJNOWICZ, CAND. MED.
F. SCHULTE, STUD. MATH.

GRYPHISWALDIAE,

TYPIS FRID. GUIL. KUNIKE REG. ACAD TYPOGR.

MDCCCLXVII.

THOMAË DE KOMIEROWSKI

FAUTORI BENEVOLENTISSIMO

HAS

STUDIORUM PRIMITIAS

PIO GRATOQUE ANIMO

OFFERT

AUCTOR.

LEONI KOENIGSBERGER

PRAECEPTORI DILECTISSIMO

NEC NON

Additamentum ad theoriam generalem.

I.

Curvae polares complementariae.

§. 1.

Motu puncti in curva qualibet $m$ti gradus respondentibus polaribus omnium graduum totidem series curvarum formantur, quae ipsae involventi originem vindicant. Haud procul est requirere, ut pro curva ad libitum electa $C(m)$ duae curvae polares puncti cuiusvis spectentur, quarum gradus ad gradum fundamentalis curvae $C(n)$ supplentur idcircoque polares complementariae nominentur. K sit $r$ta et K' $(n-r)$ta polaris puncti p respectu curvae fundamentalis $C(n)$. Si punctum movetur in curva K (si ipsam habemus curvam absolutam) singulae polares huius puncti inde ab ultima usque ad primam faciunt series curvarum indicis:

a) $(n-r)(n-1)$; $(n-r)(n-2)$; $(n-r)(n-3)\ldots.$
$(n-r)^2$; $(n-r)(n-r-1)\ldots.(n-r)$.

Series indicis: $(n-r)^2$: eam obtinet vim, ut omnes eius curvae unum punctum secent idque polum p curvae K;

quod quidem inter communes conditiones referendum, quas secundum Cr. No. 34 curvae seriei exsequi debent

Si K' absolutam accipimus curvam, item puncti motu in illa series curvarum cum his indicibus oriuntur:

b) $r(n-1)$; $r(n-2)$; $r(n-3)$; .... r^2; $r(r-1)$....r.

Curvae seriei: r^2: ipsae omnes punctum p secant, polum curvae K^1.

Gradus involventium serierum curvarum sub a) comprehensarum secundum Cr. No. 101, pag. 149 deinceps sunt:

$(n-r)[3n-r-5]$
$2(n-r)[3n-r-7]$
$3(n-r)[3n-r-9]$
. . . .
$r(n-r)[3(n-r-1)]$
. . . .
$(n-1)(n-r)[n-r-1]$
et serierum sub b)
$r[2n+r-5]$
$2r[2n+r-7]$
$3r[2n+r-9]$
. . . .
$3r(n-1)(r-1)$
. . . .
$(n-1)r(r-1)$

. Curvae K et K^1 sine punctis multiplicibus acceptae.

Hae involventes, ut notum, $(n-1)$ta, $(n-2)$ta.... secunda, prima polaris curvae K vel curvae K^1 vocantur. Polaris ϱta curvae K est locus geometricus polorum, quorum $(n-\varrho)$tae polares curvam K tangunt, eaque curva $(n-\varrho)(n-r)(n-r+2\varrho-3)$ti gradus.

Item ϱta polaris curvae K^1 est locus polorum quo-

rum $(n-\varrho)$tae polares curvam K^1 tangunt et obtinet gradum $(n-\varrho)r(r+2\varrho-3)$tum. Utraque curva intersecatur quapropter $(n-\varrho)^2(n-r)(r+2\varrho-3)(n-r+2\varrho-3)$ punctis.

Unde haec conclusio:

Theorema I. Respectu curvae fundamentalis $C(n)$ pro quoque puncto p plani

$$(n-\varrho)^2.(n-r)\,r(r+2\varrho-3)(n-r+2\varrho-3)$$

alia sunt puncta, quorum polares $(n-\varrho)$tae duas polares complementarias huius puncti simul tangunt.

Pro $\varrho=(n-1)$ sequitur:

Theorema II. In reti geometrico primarum polarium pro quoque puncto p $r(n-r)[3n-r-5].[2n+r-5]$ sunt curvae, quae duas polares complementarias huius puncti simul tangunt.

Quodsi $(n-\varrho)$ta polaris curvae K cum ϱta polari curvae K^1 vel vice versa componitur, habemus

Theorema III. Quodsi respectu curvae fundamentalis $C(n)$ certo quantitatis r valore accepto pro puncto p: $r(n-r)(n-\varrho)\varrho(3n-r+2\varrho-3)(r+2\varrho-3)$ primo casu, altero $r(n-r)\varrho(n-\varrho)(n-r+2\varrho-3).(2n+r-2\varrho-3)$ alia sunt puncta, quorum cuiusvis sed eiusdem ordinis polares unam valori quantitatis r respondentium complementariarum polarium puncti p tangunt, etiam alia polaris complementaria puncti p complementariis polaribus illarum tangitur. Porro quodsi primum acciderit pro $\varrho=r$ sequitur.

Theorema IV. Respectu curvae fundamentalis $C(n)$ pro quoque puncto p: $3r^2(n-r)^2[3(n-r-1)](r-1)$: alia sunt puncta, quorum polares complementariae, certo quantitatis r valore accepto, pares ordine polares puncti p tangunt.

Quoniam curvae K et K^1 se ipsas tangentes spectari possuut, polum p unnm ex his punctis esse sequitur, eumque involventes valore $\varrho = r$ definitas transgredi elucet.

Nota. Theorema XII. Cr. pag. 154 hoc modo nunc enuntiari potest:

Polum 0rtae polaris $(n-r)$tae polares eius punctorum, $(n-r)$tae polares eius tangentium ipsaque eius $(n-r)$ta polaris transgreditur.

Altero casu pro $r = \varrho$ efficitur:

Theorema V. Respectu curvae $C(n)$ pro quoque puncto p: $r^2(n-r)^2(n+r-3)(2n-r-3)$: alia sunt pnncta, quorum polares complementariae, certo valore quantitatis r accepto, impares ordine polares puncti p tangunt.

Polus p pro quoque puncto contactus curvarum K et K^1 est unum ex his punctis, nam si hoc acciderit, punctum p punctum intersectionis duarum infinite proximarum polarium $(n-r)$tarum et $r$tarum esse patet, ergo punctum commune involventium, quae ad hunc casum spectent.

Theoremata, quae modo explicavimus, in unum theorema comprehendi possunt, si ϱta polaris curvae K cum ϱ'ta polari curvae K^1 componitur, et ϱ et ϱ' inter limites proprios variantur; sua vi ex parte haec enunciata excidunt, si K primam et K^1 ultimam polarem vel vice versa puncti p significat, quum prima polaris rectae sit gradus 0ti atque solum ex $(n-1)^2$ polis illius rectae constet.

§. 2.

Puncti motu in certa quapiam curva series polarium orientes omnes inter se proiectivae fiunt, cuique enim

puncto una solum polaris respondet, unicuique polari unum solum punctum in curva, ergo polari unius seriei una solum respondet polaris alterius seriei, id quod accurate est criterium proiecvititatis duarum formarum geometriae. Punctis intersectionis respondentium elementorum duarum quarumlibet inter se proiectivarum serierum nova, ut constat, efficitur curva; pro duabus seriebus complementariarum polarium ordo huius loci, si accipimus punctum moveri in curva qualibet $C(n)$ est:

$$m[n(n-2\varrho)+2\varrho^2]$$

L significare hunc locum statuimus. Curvae K et K^1 praebent numeros ordinis:

$$(n-r)[n(n-2\varrho)+2\varrho^2] \text{ et } r[n(n-2\varrho)+2\varrho^2]$$

duorum systematum $(\frac{n}{2}-1)$ curvarum L et L^1 pro pari n, $(\frac{n-1}{2})$ curvarum L et L^1 pro inpari n; duabus ex his curvis, quae uni eidemque ϱ respondent, compositis, efficiuntur puncta intersectionis:

$$r(n-r)[n(n-2\varrho)+2\varrho^2]^2.$$

Theorema VI. Quodsi K et K^1 duae sunt polares complementariae puncti p, certis pro ϱ et r valoribus acceptis, in una quaque curva est systema:

$$r(n-r)[n(n-2\varrho)+2\varrho^2]^2$$

punctorum; quae quidem systemata eam inter se habent relationem, ut quodque punctum unius systematis respondens sibi punctum in altero systemate definiat, quatuor polares complementariae electo valori ϱ respondentes cuiusqne hoc modo exorti paris punctorum uno eodemque puncto intersecantur.

Nota. Si $\varrho = r$ ponitur, $(n-r)$tae polares punctorum curvae K omnes subsecant p; p vero etiam secant: $r(n-r)$: $r$tae polares punctorum totidem huius curvae et hic curvas sibi respondentes primae seriei incidunt; ergo punctum p est $r(n-r)$plex punctum ortae curvae L et tangentes eius $r(n-r)$ ramorum in puncto p tangunt simul, ut notum, respondentes curvas primae seriei. Ita etiam se res habet cum curva L^1 eiusdem ordinis polaribus punctorum K^1 effecta, quamobrem curvas L et L^1 in puncto p: $r^2(n-r)^2$ puncta intersectionis habere opportet.

Quum summa numerorum ordinis curvarum L et L^1: $n[n(n-2\varrho)+2\varrho^2]$; ab r non dependeat, elucet, certo valore quantitatis ϱ accepto, pro omnibus polaribus puncti p constantem fore (id quod etiam tum, quum duae curvae polares, quarum ordines ad ordinem curvae fundamentalis suppleantur, diversis gaudeant polis, vim habere videmus; idcirco etiam tales curvas polares complementarias dicamus).

Unde sequitur:

Theorema VII. Curvae L et L^1 constante quantitatis ϱ valore accepto, pro omnibus polaribus complementariis puncti p ipsae sunt curvae complementariae.

Ex iis, quae adhuc explicata, criterium iam relationis complementariae duarum curvarum polarium deduci potest. Si enim in expressione: $r(n-r)[n(n-2\varrho)+2\varrho^2]^2$ quantitates ϱ et r una deinceps totos numeros inde ab 1 usque ad $\frac{n-2}{2}$ vel $\frac{n-1}{2}$ significant, $\frac{n-2}{2}$ vel $\frac{n-1}{2}$ certi definitique numeri praebentur, certo quantitatis n valore accepto; $\varphi(r, \varrho)_1$, $\varphi(r, \varrho)_2$ .... etc. hos numeros significare statuimus. Duabus nunc curvis polaribus K et K^1 ad libitum respectu curvae fundamentalis $C(n)$ pro-

positis quaeri potest, utrum sint complementariae nec ne; quod ut decidatur construantur omnes polares complementariae punctorum harum curvarum; quodsi nunc in utraque curva systema aut $\varphi(r, \varrho)_1$, aut $\varphi(r, \varrho)_2$, aut $\varphi(r, \varrho)_3$ .... etc. est punctorum, quae eam inter se habeant relationem, ut uni puncto primi systematis unum solum punctum alterius systematis et vice versa respondeat, atque ut curvae polares complementariae valori (r, ϱ) respondentes cuiusque paris punctorum respondentium unum idemque punctum plani transeaut, re vera, si qui $\frac{n-1}{2}$ vel $\frac{n-2}{2}$ casuum locum habuerit, nobis est accipiendum, curva K et K^1 complementarias curvas polares esse; quodsi porro certo quantitatis ϱ valori respondentes curvae polares complementariae $\varrho^2(n-\varrho)^2$ parium punctorum ex ambobus huic valori quantitatis ϱ respondentibus systematibus in curva K et K^1 unum idemque punctum plani transgrediuntur, curvae K et K^1 sunt complementariae, quaeque ordinis ϱti vel $(n-\varrho)$ti, uno eodemque polo gaudent.

§. 3.

Polares punctorum curvae K, quae ei sunt complementariae, omnes in polo huius curvae intersecantur. Quodsi nunc in plano curvae K punctum p' centrum fascis radiorum accipimus, in quoque radio eius $(n-r)$ puncta curvae K iacent, quippe quae ordinis $(n-r)$ti poneretur. Omni radio huius fascis respondent igitur $(n-r)$ curvae punctum p transeuntes. Ergo curvae polares, quae punctum p transgrediuntur, respectu radiorum fascis in puncto p' in plane definitas copulationes $(n-r)$ elementorum dividuntur et hac descriptione in-

volutionem $(n-r)$ti gradus faciunt. Quod vero ad punctum p' valet, valet etiam ad omne aliud punctum plani curvaeque in puncto p se intersecantes rationibus infinite multis involutionem $(n-r)$ti gradus formare possunt.

Unde:

Theorema VIII. Curvae K polari puncti p respectu curvae fundamentalis $C(n)$ posita, omnes curvae polares eius punctorum eique complementariae in puncto p intersecantur atque hic formant involutiones $(n-r)$ti gradus infinite multas; binis involutionibus communis est semper $(n-r)$ curvarum copulatio.

II.

Constituantur singularitates cuiusvis retis curvarum $n$ti gradus.

§. 1.

Quodvis rete curvarum $n$ti ordinis tribus, ut constat, eius curvis plane est definitum; omnes retis curvae eodem puncto utentes formant fascem curvarum.

Punctis iam plani (ut Cr. pag. 265 demonstratum) et curvis cuiuslibet retis talis relatio imponi potest, ut uni puncto plani una solum curva retis et uni curvae retis unum solum punctum plani respondeat; qua ex relatione primum sequitur, rectae cuidam fascem curvarum, quarum puncta respondentia in hac recta sint posita, respondere, deinde n^2 puncta plani, centra fascis modo commemorati. Si R est recta, sunt in ea $3(n-1)^2$ puncta eiusmodi quibus curvae cum puncto duplici respondeant,

quum fascis curvarum, qui huic rectae respondet, secundum Cr. Nr. 88 totidem puncta duplicia contineat. Locus igitur punctorum, quibus curvae cum puncto duplici respondeant, est curva Σ ordinis $3(n-1)^2$ti; locus vero ipsorum punctorum duplicium, ut notum, est curva Iacobiana retis et secundum Cr. Nr. 93 et 95 ordinis $3(n-1)$ti. Sequitur curvam Iacobianam et curvam Σ eundem in modum sibi respondere, atque Hessianam et Steinerianam retis primarum polarium; punctum quoddam in altera uni tantum puncto alterius respondet planeque definit. Punctis α et β punctis curvae Iacobianae acceptis habemus duo puncta a et b in curva Σ respondentia. Utraque curva retis cum puncto duplici in α et β definit fascem curvarum rectaque huic respondens puncta a et b coniungit. Quodsi nunc puncta α et β infinite propius sibi accedant, etiam punctum a puncto b infinite propius accedit et recta haec puncta iungens tangens curvae Σ exsistit.

Theorema I. Iacobiana est locus punctorum, quorum rectae respondentes curva Σ involvuntur.

Si contra rectas A et B tangentes curvae Σ in punctis a et b, punctumque p punctum intersectionis earum accipimus, cuique fascis curvarum respondet in punctis respondentibus Iacobianae α et β; curva utrique fasci communis est curva puncto p respondens transitque puncta α et β, quoniam sunt puncta basis.

Punctis a et b infinite proprius sibi accedentibus etiam α et β infinite proprius sibi accedunt curvaque utrique fasci communis Iacobianam in puncto $(\alpha\beta)$ tangit.

Theorema II. Iacobiana est involvens earum curvarum retis, quarum puncta respondentia in curva Σ sunt posita.

Praeter puncta intersectionis tangentium infinite vicinarum curvae Σ vel puncta ipsius huius curvae, quae sunt eiusmodi, ut curvae retis iis respondentes Iacobianam tangant, etiam puncta tangentium inflexionalium curvae Σ eadem gaudent natura, quum quodque punctum eiusmodi tangentis punctum intersectionis duarum infinite vicinarum tangentium haberi possit. Involvens igitur rectarum punctis Iacobianae respondentium est curva Σ et eius tangentes inflexionales; ordinem iam huius involventis proponimus nobis statuere, curva Iacobiana sine punctis multiplicibus accepta.

Quodsi est a punctum huius involventis, curva retis ei respondet, quae Iacobianam tangit. Curvae vero retis puncta sibi respondentia in recta quadam habentes formant fuscem; tot igitur erunt puncta intersectionis cuiuslibet rectae R cum involvente, quot erunt curvae fascis huic rectae respondentis, quae Iacobianam tangant, id est, quoniam ipsa ordinis $3(n-1)$ti et sine punctis multiplicibus accepta (vid. Cr. pag. 122):

$$3(n-1)[3(n-1)+2n-3]=3(n-1)(5n-6).$$

Unde numerus tangentium inflexionalium curvae Σ:

$$3(n-1)(5n-6)-3(n-1)^2=3(n-1)(4n-5).$$

Curva Σ est denique classis:

$$3n(n-1)\text{tae}.$$

Transgrediuntur enim punctum quodvis plani p tot tangentes curvae Σ, quot sunt puncta intersectionis curvae puncto p respondentis cum curva Iacobiana, id quod numerum modo prolatum constituit (vid. Cr. pag. 267. theor. I.)

Quum vero ordo, classis numerusque tangentium in-

flexionalium curvae Σ sint nobis nota, facile est formulis illis Plueckerianis, quae ad singularitates curvae planae valent, ceteras singularitates huius curvae deducere.

Curva Σ habet igitur:

$12(n-1)(n-2)$ cuspides,
$\frac{3}{2}[(n-1)(n-2)(3n^2-3n-n)]$ puncta duplicia,
$\frac{3}{2}[(n-1)(n-2)(3n^2-3n-8)]$ tangentes duplices.

§. 2.

Quodsi A est tangens duplex curvae Σ, curvae fascis huic rectae respondentis duobus diversis punctis inter se tanguntur, id est in punctis α et β curvae Iacobianae punctis a et b respondentibus, in quibus curva Σ tangente duplici tangitur; punctis a et b propius sibi accedentibus ex tangente duplici fit tangens inflexionalis punctaque α et β in unum concidunt punctum, in quo curvae fascis respondentis contactum trium punctorum ineunt.

Ex quo efficitur:

Theorema III. Sunt in reti quolibet $n$ti gradus $3(n-1)(4n-5)$ fasces, quorum curvae contactum trium punctorum ineunt. Quum omni puncto curvae Σ curva retis cum duplici puncto respondeat, puncto duplici curvae Σ curva retis cum duobus punctis duplicibus respondeat necesse est.

Theorema IV. Sunt in reti quolibet $n$ti gradus $\frac{3}{2}[(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)]$ curvae, quae duo habent puncta duplicia.

Theorema V. Sunt in reti quolibet $n$ti gradus $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-8)$ fasces, quorum curvae duobus diversis punctis inter se tanguntur.

Puncto a duplici puncto curvae Σ accepto, curvam retis ei cum duobus punctis duplicibus respondere oportet. Duobus tangentis curvae Σ in puncto duplici duo fasces retis respondent, qui habent curvam communem curvam cum duobus punctis duplicibus. Si punctum duplex curvae Σ in cuspidem coarctatur ex duobus fascibus unus tantum fit fascis duoque puncta duplicia in cuspidem transeunt, quum hoc idem atque duo puncta duplicia valet.

Unde haec conclusio:

Theorema VI. Sunt in quolibet curvarum reti $n$ti gradus $12(n-1)(n-2)$ curvae, quae cuspide utuntur.

III.

Amplificatio curvarum Lji.

§. 1.

Genus curvarum Lji, quae in Cr. Nr. 116 disquiruntur, ipsam veramque naturam ostendit, si cum curva Hessiana primisque polaribus duorum certorum punctorum j et i confertur; notio vero harum curvarum aut substitutione cuiuslibet involventis loco unius puncti, altero reservato, aut substitutione eiusdem curvae loco amborum punctorum aut denique substitutione quarumlibet duarum involventium loco amborum punctorum amplificari potest. Disquisitio ultimi casus, quem maxime esse generalem ceterosque comprehendere facile elucet, in scripto Cremonae non invenitur, quam perficere tentantes tale nobis problema proponimus.

„Definiatur locus variabilis puncti p, quod tali gaudeat proprietate, ut duae ex eo ad certas curvas $K(r)$

et $K(s)$ $r$tae et $s$tae classis ductae tangentes respectu polaris conicae puncti p polares coniugatae exsistant."

p sit punctum plani; polaribus eius conica et recta constructis locus punctorum, quae sunt respectu huius polaris conicae poli tangentium curvae $K(r)$, est reciproca curva curvae $K(r)$ item locus polorum tangentium curvae $K(s)$ reciproca curva curvae $K(s)$. Recta polari puncti p hae curvae reciprocae in r et s punctis intersecantur, polis tangentium, quae ex puncto p ad curvas $K(r)$ et $K(s)$ duci possunt. Quodsi nunc una ex puncto p ad curvam $K(r)$ ductarum tangentium unum ex s punctis, unaque ad curvam $K(s)$ ductarum tangentium unum ex r punctis in recta polari puncti p intercisis transgreditur, punctum p est punctum quaesitae curvae.

Curva fundamentalis $C(n)$ sine punctis multiplicibus accepta $r\ n(n-1)$ communes tangentes cum curva $K(r)$ habet; si unum ex $r.n(n-1)$ punctis contactus in curva fundamentali spectatur, polaris eius recta respectu polaris conicae est tangens curvae fundamentalis in hoc puncto communis etiam curvae $K(r)$, qua de causa reciproca curvae $K(r)$ punctum p transeat necesse est. Atqui ex puncto $(p)s$ tangentes ad curvam $K(s)$ duci possunt, quarum poli, quoniam sunt puncta intersectionis primae polaris puncti p cum reciproca curvae $K(s)$ respectu conicae polaris eiusdem puncti omnes in communi tangente in hoc puncto curvae fundamentalis et curvae $K(r)$ iacent, ex quo sequitur hancce tangentem curvae $K(r)$ cum quaque s tangentium ex puncto p ad curvam $K(s)$ ductarum, systema coniugatarum polarium efficere; quum vero cuique tali systemati punctum quaesitae curvae respondere oporteat, concluditur:

„Locus quaesitus $s$ties omne punctum curvae funda-

mentalis transgreditur, in quo haec tangente curvae $K(r)$ tangitur"

itemque:

„Locus quaesitus $r$ties omne punctum curvae fundamentalis transgreditur in quo haec tangente curvae $K(s)$ tangitur."

Involvens indicatricum punctorum curvae Hessianae est classis $3(n-1)(n-2)$tae habetque cum curva $K(r)$: $3r(n-1)(n-2)$ communes tangentes; qua de re puncta sunt $3r(n-1)(n-2)$ curvae Hessianae, quorum indicatrix curvam $K(r)$ tangit. Quodsi p est unum ex his punctis utitur conica polari systemate duarum rectarum, quae in respondenti puncto θ curvae Steinerianae intersecantur. Atqui respectu systematis harum rectarum punctum θ polus est cuiusque rectae plani, punctum p non continentis et omnis recta hoc punctum continens infinito numero polorum gaudet, qui omnes in ea recta sunt positi, qui est quartus radius harmonicus ad rectam propositam et ad systema illud rectarum in puncto θ se intersecantium; hac ex re necessario concluditur reciprocas curvas curvarum $K(r)$ et $K(s)$ ex duobus fascibus r et s radiorum constare tangentemque (po) curvae $K(r)$ cum omni s tangentium, quae ex puncto p ad curvam $K(s)$ duci possint, systema coniugatarum polarium efficere. Quum vero ex puncto p tangens po ad curvam $K(r)$ ducta reciprocam curvae $K(s)$ in s punctis in puncto o concidentibus incidat, puncta s respondentia quaesiti loci puncto p infinite proprius accedere probatur, id est curvam quaesitam in puncto p tactum s punctorum cum curva Hessiana inire oportet. Idem valet ad quodque punctum curvae Hessianae, cuius indicatrix curvam $K(r)$ vel curvam $K(s)$ tangit, id solum,

quodsi alterum acciderit, exsistit discrimen, quod tum fit r punctorum contactus.

„Locus quaesitus in punctis curvae Hessianae, quorum indicatrix curvam $K(r)$ vel $K(s)$ tangit, cum illa tactum s vel r punctorum habet."

§. 2.

Atque ut ordo quaesitae curvae definiatur, quot eius puncta in recta quadam M iaceant, videamus. Esto p punctum quodvis huius rectae, construatur eius recta et conica polaris, tum curvae reciprocae curvarum $K(r)$ et $K(s)$ respectu conicae polaris puncti p; recta polaris puncti p reciprocas hascurvas in r et s punctis incidit. Quodsi nunc ex r punctis intersectionis primae reciprocae curvae cum rectapolari puncti p omnes tangentes ad curvam $K(s)$ ductas esse accipimus itemque ex s punctis intersectionis alterius reciprocae curvae omnes tangentes ad curvam $K(r)$, utroque casu (rs) tangentes oriuntur, quae quidem duas copulationes rs punctorum in recta M constituunt. Atqui puncto intersectionis a rectae polaris cum recta $M(n-1)$ puncta p respondent prima polari puncti a in recta M intercisa, quorum polares rectae omnes punctum a transeunt. Attamen cuique polari ultimae punctorum prima polari puncti a in recta M intercisorum duae copulationes rs punctorum respondent, omnibus igitur $(n-1)$ polaribus ultimis duae diversae copulationes $(n-1)$ $r.s$ punctorum. Si nunc punctum quoddam primae copula tionis cum punctoalterius confertur oriri punctum quaesiti loci suscepta constructione demonstratur.

Puncto a in recta M progrediente cuique eius situi duae certae copulationes $r.s(n-1)$ punctorum respondent,

qua quidem re duae diversae sibi proiectivae involutiones gradus $rs(n-1)$ti constituuntur; quae quum involutiones $2rs(n-1)$ habeant puncta communia sequitur:

„Locus quaesitus est ordinis $2rs(n-1)$ti.“

IV.

Proposita sit recta M; involvens polarium rectarum punctorum eius rectae est curva classis $(n-1)$tae et involvens indicatricum eorundem punctorum curva classis $2(n-1)$tae. Utraque curva igitur $2(n-1)^2$ tangentes habet communes, quae et rectae polares et indicatrices totidem punctorum rectae M spectari possunt; idcirco sequitur

Theorema I. Sunt in recta qualibet M $2(n-1)^2$ puncta, quorum rectae polares indicatrices sunt punctorum intersectionis harum polarium cum recta M.

Atque iam in recta M duo systemata $2(n-1)^2$ punctorum discernenda; alterum systema polorum, alterum puncta intersectionis rectae M cum rectis eorum polaribus. Quodsi recta M circum quodlibet punctum fertur, quaeque copulatio punctorum curvam ordinis $2(n-1)^2$tae generat. Vero curva fundamentalis recta M in n punctis intersecatur, in quibus indicatrix cum recta polari collabitur, ordo igitur curvae fundamentalis ab ordinibus illarum subtrahendus, effluitque in utroque casu curva ordinis

$$2(n-1)^2-n=[n(2n-5)+2]\text{ti}.$$

Quodsi nunc J primam, J' alteram curvam significare statuimus sequitur

Theorema II. Curva J' est locus punctorum, quorum una indicatrix simul est recta polaris puncti curvae

J, viceque versa curva J est locus punctorum, quorum recta polaris simul est una ex indicatricibus punctorum curvae J'.

Iam curva J transversali quadam transsecetur cuique puncto intersectionis punctum curvae J' respondet, quodsi transversalis in tangentem curvae J vertitur, duobus punctis infinite propius sibi accedentibus tangentique illi cum curva J communibus etiam duae polares rectae infinite propius se subsequentes respondent, quae tangentem curvae J in duobus punctis infinite propius sibi accedentibus intersecant, unde sequitur

Theorema III. Curva J et J' sunt eiusdem classis rotationeque unius eiusdemque rectae generantur.

Sit porro p punctum plani; prima polaris eius puncti et curvam J et curvam J' in $(n-1)[n(2n-5)+2]$ punctis intersecat, quorum rectae polares punctum p transgrediuntur.

Theorema IV. Involvens rectae, quae ita movetur, ut simul sit recta polaris puncti curvae J et indicatrix puncti curvae J', est curva B classis

$$(n-1)[n(2n-5)+2] \text{tae}.$$

Inversione huius theorematis oritur

Theorema V. Curva B est locus punctorum, quorum primae polares curvam J tangunt, eademque pars involventis, quam indicatrices punctorum curvae J' efficiunt.

Quum curva B cum curva Steineriana et cum involvente indicatricum curvae Hessianae

$$3(n-1)^2(n-2)[n(2n-5)+2]$$

tangentes habeat communes sequitur

Theorema VI. In curva J:

$$3(n-1)(n-2)^2[n(2n-5)+2]$$

sunt puncta, quae in curva Hessiana non posita cum totidem punctis curvae Hessianae eadem recta polari utuntur, et in curva J' $3(n-1)(n-2)^2[n(2n-5)+2]$ puncta, quorum una indicatrix cum tangente curvae Steinerianae collabitur.

Theorema VII. In curva J':

$$3(n-1)(n-2)^2[n(2n-5)+2]$$

sunt puncta, quae in curva Hessiana non posita, cum totidem punctis illius curvae una eademque indicatrice utuntur, et in curva J $3(n-1)(n-2)^2[n(2n-5)+2]$ puncta, quorum prima polaris indicatrix est totidem punctorum curvae Hessianae.

Curvae quarti gradus.

I.

Constructio curvarum quarti gradus facta quatuordecim quae sunt data punctis.

§. 1.

Constructio curvae quarti gradus aut duobus fascibus sectionum conicarum proiectivis aut fasce radiorum ac fasce curvarum proiectivo tertii gradus potest fieri. Generale enim theorema in Cr. No. 50 pro $n = 2$ et $n' = 2$, deinde pro $n = 3$ et pro $n' = 1$ haec est:

Theorema I. a) Locus punctorum intersectionis sectionum conicarum fascis secundi gradus cum sectionibus conicis respondentibus alterius fascis illi proiectivi, est curva quarti gradus, quae omnia octo puncta basis amborum fascium transgreditur.

b) Locus punctorum intersectionis curvarum fascis tertii gradus cum respondentibus radiis fascis radiorum illi proiectivi, est curva quarti gradus, quae omnia decem puncta basis amborum fascium transgreditur.

Expressione generali: $\frac{n(n+3)}{2}$ numerum necessaria

rum quae sufficiant conditionum continente, quas ad construendam certi ordinis curvam datas esse oportet, curvam quarti gradus quatuordecim datis punctis plane definitam esse elucet. Primam, quas commemoravimus, rationem generationis, quum hic exhibeamus, quomodo, quaerendum nobis est, respectu theorematis I. puncta basis utriusque fascis sint constituenda, ut curva quarti gradus illis generata transgrediatur quatuordecim puncta data? Primum per se intelligitur propositae quaestionis solutionem per curvas inferioris odinis fieri, quarum constructionem notam accipimus; tum dependet solutio haec a nonnullis constructionibus enunciatisque auxiliaribus, quae nobis igitur erunt praemittenda.

§. 2.

Systema curvarum quarti gradus eadem sedecim puncta transgredientium fascis curvarum quarti gradus vocatur. In qualibet linea recta, in plano fascis huius posita, unaquaque curvarum systema quatuor punctorum interciditur, quae omnia systemata sive copulationes punctorum, quum quaeque copulatio uno suo puncto sit definita, involutionem quarti gradus efficiunt. Quodsi linea recta unum ex sedecim punctis basis transeat, involutio efficitur quarti gradus cum uno puncto communi; quodsi duo puncta basis a et b transeat, involutio fit quarti gradus, cuius copulationes duobus utantur punctis communibus, quibus neglectis, in quadratam transit involutionem, quae ut notum, duo habet puncta duplicia; id est exceptis contactibus duobus in punctis a et b linea per haec puncta ducta duobus tantum fascis curvis revera tangi potest, quum tactus duos, qui restent, necessario imaginarios esse oporteat. (vid. Cr. No. 49).

Haec puncta contactus, quae revera esse possunt, cum punctis duplicibus quadratae involutionis semper coincidunt, quae tali gaudent proprietate, ut omnes punctorum copulationes segmentum iis definitum harmonice dividant. Duobus punctorum paribus quadratae involutionis datis puncta duplicia facile constitui possunt, (vid. Hesse Analytische Geometrie des Raumes p. 27) tum pro quoque puncto rectae coniugatum punctum est constitutum, ergo omnia punctorum paria definita. Unde sequitur

Theorema II. Si per duo puncta basis a et b curvarum fascis quarti ordinis recta linea ducitur, puncta intersectionis curvarum huius fascis in ea involutionem quadratam definiunt, cuius puncta duplicia semper cum punctis contactus (si revera tactus locum habet) curvarum fascis cum hac recta coincidunt. Punctis a et b puncta coniugata sunt ea, quae curvis interciduntur, quae rectam in puncto b et a tangunt.

§. 3.

Dati sunt quinque radii in uno puncto se intersecantes, quos symbolo $0(12345)$ notamus et praeterea quinque puncta $(abcde)$. Definiatur punctum x eiusmodi, ut radii fascis $0(12345)$ radiis fascis $x(abcde)$ deinceps proiective respondeant. Ratio duplex quatuor radiorum $0(1234) = \lambda$ constituit cum quatuor punctis $(abcd)$ sectionem conicam, haec puncta transgredientem, item ratio duplex quatuor radiorum $0(1235) = \lambda'$ cum quatuor punctis $(abce)$ sectionem conicam haec puncta transgredientem. Utraque sectio conica tali gaudet proprietate, ut pro omnibus punctis m primae aequatio habet locum:

$$m(abcd) = 0(1234) = \lambda,$$

item pro omnibus punctis n alterius:

$$n(abce) = 0(1235) = \lambda'.$$

Puncta (abc) quum sint utrique sectioni conicae communia, quartum punctum intersectionis x habent, quod utrique aequationi satisfaciat necesse est:

$$x(abcd) = 0(1234) = \lambda$$
$$x(abce) = 0(1235) = \lambda'$$

ex quo sequitur aequatio:

$$x(abcde) = 0(12345).$$

Ergo x est punctum quaesitum. Quodsi porro ratione duplici quatuor radiorum $0(2345) = \mu$ sectio conica puncta $(bcde)$ transgrediens construitur, et ratione duplici quatuor radiorum $0(2341) = \mu'$ sectio conica puncta $(bcda)$ transgrediens, quoniam ratio duplex μ' ratione duplici λ definitur, sectio conica haec est eadem atque prima antecedentium. Pro punctis harum sectionum conicarum habent locum aequationes:

$$m'(bcde) = 0(2345) = \mu$$
$$n'(bcda) = 0(2341) = \mu'$$

Et pro puncto intersectionis y utriusque:

$$y(bcde) = 0(2345)$$
$$y(bcda) = 0(2341).$$

Ex aequatione: $x(abcde) = 0(12345)$ haec vero sequitur:

$$x(bcde) = 0(2345).$$

Ergo sunt puncta x et y unum idemque punctum sectioque conica valori μ respondens cum sectione conica valori λ vel μ' respondente puncta $(bcdx)$ et cum sectione

conica valori λ' respondente puncta $(bcex)$ habet communia.

Theorema III. Quinque in puncto 0 se intersecantibus lineis rectis et quinque datis punctis tres sectiones conicae constituuntur, quibus duo datorum punctorum tertiumque non datum sunt communia, pro quo valet aequatio:

$$0(12345) = x(abcde).$$

§. 4.

Constructio nonnullarum curvarum quarti gradus tredecim quae sunt data punctis.

Data sunt tredecim puncta $(12\ldots.8)(abcde)$ quibus secundum Cr. No. 34 fascis curvarum quarti gradus iniici potest. Punctis $(123\ldots78)$ fascem curvarum tertii ordinis imponimus exhibemusque eas curvas, quae puncta $(abcde)$ transgrediuntur. Quodsi nunc punctum x definiamus eiusmodi, ut radii ex eo punctis $(abcde)$ traiecti quinque tangentibus, quae in quolibet puncto basis curvarum fascis punctis $(12\ldots.78)$ impositi ad curvas puncta $(abcde)$ transgredientes ductis proiective respondeant, omnino fascis radiorum in puncto x fascisque tangentium in quolibet basis puncto vel ipse fascis curvarum hac descriptione proiectivi fiunt punctaque intersectionis elementorum sibi correspondentium secundum theorema I b) in curva quarti gradus sunt posita, quae puncta $(12\ldots.78)$ $(abcde)$ et punctum x transgreditur.

Punctum x quale hic exigetur secundum theorema III. constitui potest. Quodsi nunc aliis octo punctis tredecim datorum punctorum alterum curvarum fascem tertii ordi-

nis imponimus atque pro ceteris quae restant quinque punctis punctum x iis proprium constituimus, alteram curvam quarti gradus tredecim data puncta transeuntem accipiemus; utraque curva alia tria puncta intersectionis praebet, quae cum datis tredecim sedecim puncta basis fascis datis punctis definiti quarti ordinis efficiunt.

Data sunt porro quatuordecim puncta ($abcd \ldots mnp$); quodsi duo eorum a et b recta linea colligantur, quaene sunt tum duo puncta (xy) quae curva quarti gradus quatuordecim datis punctis definita in recta (ab) interciduntur?

Secundum ea, quae modo explicata, duas curvas quarti gradus construimus, quae prima tredecim puncta ($abcd \ldots nm$) transeuntes curvarum fascem quarti gradus definiunt atque in recta (ab) quatuor puncta intercidunt, quae duae punctorum copulationes ad eandem quadratam involutionem referuntur; punctis duplicibus huius involutionis inventis tota est omnino involutio definita. Tredecim aliis punctis ($abcd \ldots mp$) item curvarum fascis quarti ordinis est constitutus, si duas harum curvarum construimus statuimusque puncta duplicia involutionis illis definitae altera involutio in recta (ab) exoritur. Atqui nunc utraque involutio habet unam punctorum copulationem communem, quae curvae ambobus fascibus quarti ordinis communi omniaque quatuordecim puncta transgredienti respondet; haec ergo curva est illa, quae punctis datis definita, puncta quaesita (xy) in recta (ab) intercidit.

Quibus praemissis denique ad generationem huius curvae, quatuordecim datis punctis definitae, duobus fascibus sectionum conicarum proiectivis transeamus puncta basis horum fascium constituere nobis proponentes. Atqui quinque eorum ad libitum ex quatuordecim datis punctis eligere licet, tria vero ad arbitrium non deligenda

et secundum Cr. Nr. 56 constituenda sunt. Prout haec tria puncta definienda uni fasci imponimus, alterique quatuor quaelibet puncta ex datis puncta basis accipimus, vel duo puncta uni et unum definiendum alteri fasci iniicimus duae diversae quaestiones terminandi puncta basis nobis exsistunt.

Exhibemus hic primam, quoniam ex sententia illius quaestionis, quae antecedunt explicabantur. Quodsi (xyz) sunt puncta quaerenda, puncta $(abcd)$ puncta basis primi et $(exyz)$ puncta basis alterius fascis sectionum conicarum accipiamus. Sectionibus conicis primi fascis omnibus descriptis unamquamque earum curva construenda quarti gradus exceptis punctis basis $(abcd)$ in quatuor punctis incidit, quae etiam respondens quaeque sectio conica alterius fascis proiectivi transgrediatur necesse est. Quum vero duo latera quadranguli completi $(abcd)$ ex adverso sita sectionem conicam primi fascis forment in rectis ab et cd itemque in rectis ad et bc puncta constituere possumus, in quibus hae conicae scctiones a curva quarti gradus construenda interciduntur, quippe quae puncta in unaquaque quatuor rectarum duabus involutionibus quadratis copulatio punctorum communis appareant. Si iam denique quatuor primis punctis et puncto e sectionem conicam imponimus, accurate est ea, quae sectioni conicae (ab), (cd) primi fascis proiective respondeat, atque alteris quatuor punctis et puncto e alteram sectionem conicam utraque curva praeter punctum (e) etiam tria alia puncta intersectionis (xyz) praebet, quae erunt puncta quaerenda. Omnibus sectionibus conicis puncta $(exyz)$ transeuntibus constructis, fascis fit primo proiectivus punctisque intersectionis sectionum conicarum respondentium oritur curva quarti gradus con-

struenda, quae puncta data quatuordecim $(abcd \ldots . mp)$ transgrediatur.

N o t a. Quodsi duo puncta uni, unum vero definiendum alteri fasci imponimus talis nobis illa puncta constituendi ratio exsistit. Puncta (abc) ex quatuordecim datis puncta basis primi fascis eligimus colligamusque tribus lineis rectis, in quibus bina puncta construenda curva quarti gradus intercisa constitui possunt, eaque sint puncta $(\alpha\beta)$, $(\alpha'\beta')$, $(\alpha''\beta'')$. Si iam punctis (de) ex quatuordecim datis, quae puncta basis alterius fascis sumimus et deinceps punctis $(\alpha\beta)$, $(\alpha'\beta')$, $(\alpha''\beta'')$ fascem sectionum conicarum iniicimus, in quoque trium, qui oriuntur, fasce una est sectio conica, quae puncta $(\alpha\beta)$ vel $(\alpha'\beta')$ vel $(\alpha''\beta'')$ in construenda curva quarti gradus definiat; quum vero has tres sectiones conicas uni eidemque fasci proprias esse oporteat, sequitur duo alia puncta (yz) praeter puncta (de) habere communia, quae sint duo puncta basis quaerenda fascis alterius; eundem in modum quartum basis punctum (x) primi fascis definitur.

§. 5.

Curva quarti gradus infinito variorum generum numero duobus fascibus sectionum conicarum proiectivis oriri potest (vide Chasles comptes rendus 1856 et 1857 et Cr. Nr. 54 et 55). Si iam quatuor puncta curvae quarti gradus ad libitum basin fascis eligimus, semper illis alia quatuor puncta plane definita eiusdem curvae respondent, quae sunt basis secundi fascis primo proiectivi; punctis intersectionis elementorum respondentium amborum fascium exoritur proposita curva quarti ordinis; quodsi quatuor puncta basis alterius fascis sectionum conicarum

„puncta contraria" primae basis vocamus theorematis I. inversione oritur

Theorema IV. Si quatuor punctis (*abcd*) curvae quarti ordinis sectionem conicam iniicimus, etiam aliis quatuor punctis ipsam intersecat, quibus fascis sectionum conicarum iniici potest, cuius quaeque curva systema punctis (*abcd*) punctorum contrariorum transgreditur; vel

Theorema V. Si quatuor punctis (*abcd*) curvae quarti ordinis sectionem conicam imponimus, curvam etiam aliis quatuor punctis intersecat. Si quinto etiam puncto ad libitum desumpto atque quatuor ultimis sectionem conicam imponimus, cum curva quarti gradus etiam tria puncta plane definita intersectionis praebet, quae cum puncto quinto ad libitum electo punctis (*abcd*) puncta contraria efficiunt.

Ut systema quoddam punctorum contrariorum constituamus, duo latera opposita quadranguli completi (*abcd*) producamus necesse est, quoad curvam propositam quarti gradus binis secant punctis; deinde si puncto ad libitum in curva accepto et quatuor punctis intercisis sectionem conicam imponimus, illa cum curva proposita etiam tria alia puncta praebet, quae sunt punctis (*abcd*) contraria puncta perquisita. Si quatuor puncta (*abcd*) in unum punctum (*a*) collabuntur, id est, si sectiones conicae fascis (*abcd*) contactum quatuor punctorum cum proposita curva quarti gradus in puncto (*a*) ineunt, ut systema quoddam punctorum contrariorum inveniatur sectionem conicam construimus, quae curvam in duobus punctis tangente in puncto (*a*) intercisis tangat atque quintum punctum ad arbitrium exhibitum curvae transeat, etiam alia tria puncta intersectionis propositae curvae praeben-

tur, quae cum puncto ad libitum accepto systema punctorum contrariorum punctis (*abcd*) efficiunt.

Simili modo inveniuntur puncta contraria, si sectiones conicae primi fascis cum curva quarti gradus proposita duos duorum punctorum, vel unum trium punctorum contactum ineunt.

§. 6.

In quoque sectionum conicarum fasce sunt tres curvae, quae ex systemate duarum rectarum constant, eaeque opposita latera quadranguli completi, quod fasci sectionum conicarum est inscriptum. Duobus fascibus sectionum conicarum compositis tot quot vis curvae quarti gradus generari possunt, quae omnes puncta basis amborum fascium transeunt; ut enim relatio quaedam proiectiva inter elementa utriusque fascis intercedat, nihil nisi tres quaelibet curvae ex quoque fasce sunt exhibendae, tum quartae cuique curvae primi fascis una tantum curva alterius respondet descriptioneque hac sectiones conicae proiective sibi respondentes generant curvam quarti gradus, quae omnia puncta basis transit.

Loco trium quarumvis sectionum conicarum in quoque fasce etiam tria systemata rectarum punctis basis utriusque fascis definitarum sumi possunt; quodsi nunc systemata rectarum in primo fasce quendam in modum tribus systematibus in altero fasce adordinantur, oritur

Theorema VI. Duo quaelibet quadrangula completa semper in duodecim punctis se intersecant, quae cum octo punctis verticis in curva quadam quarti gradus sint posita.

§. 7.

Generatio curvarum quarti gradus motu puncti facta.

Si a et a' sunt duo puncta basis, quae sunt propria duobus diversis fascibus sectionum conicarum, atque cuique puncto duo certi axes impositi (BC) et $(B^I C^I)$; si iam circa a et a' duae rectae T et T^I feruntur, aequatio proiectivae relationis duorum in a et a' fascium radiorum, ita ut uni T in primo fasce unum modo T^I in secundo respondeat, haecce est:

$$\alpha \cdot \frac{\sin(BT)}{\sin(CT)} \cdot \frac{\sin(B'T')}{\sin(C'T')} + \beta \cdot \frac{\sin(BT)}{\sin(CT)} + \gamma \frac{\sin(B'T')}{\sin(C'T')} + \delta = 0,$$

ubi $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sunt coefficientes constantes.

Accipiamus iam duos tertios axes certos D et D^I ponentes:

$$\frac{\sin(BT)}{\sin(CT)} : \frac{\sin(BD)}{\sin(CD)} = r.$$

Aequatio superior fit:

$$ar \frac{\sin(BD)}{\sin(CD)} \cdot \frac{\sin(B'T')}{\sin(C'T')} + \beta r \frac{\sin(BD)}{\sin(CD)} + \gamma \frac{\sin(B'T')}{\sin(C'T')} + \delta = 0.$$

In hanc aequationem ratione anharmonica quatuor respondentium rectarum B^I, C^I, D^I, T^I inducta simulque posito:

$$\alpha \cdot \frac{\sin(BD)}{\sin(CD)} = \alpha' \quad \text{et} \quad \beta \frac{\sin(BD)}{\sin(CD)} = \beta'$$

accipiemus:

$$\alpha' r r' \frac{\sin(B'D')}{\sin(C'D')} + \beta' r + \gamma r' \frac{\sin(B'D')}{\sin(C'D')} + \delta = 0.$$

Quodsi denique expressiones:

$$\alpha' \frac{\sin(B'D')}{\sin(C'D')} = \text{novae cuidam constanti } \alpha, \text{ et}$$

$$\gamma \frac{\sin(B'D')}{\sin(C'D')} = \text{novae cuidam constanti } \gamma$$

ponimus, accipiemus:

$$\alpha rr' + \beta r + \gamma r' + \delta = 0.$$

Haec est aequatio proiectivae relationis amborum fascium radiorum in a et a', ex quatuor constantibus coefficientibus $(\alpha\beta\gamma\delta)$ una (δ) ad libitum eligi potest.

Punctis quatuor $(abcd)$ punctis basis primi fascis sectionum conicarum et $(a'b'c'd')$ secundi fascis acceptis pro tribus axibus B, C, D in a et B', C', D', in a', quoniam ad libitum accepti erant, has rectas substituere licet:

$$ab,\ ac,\ ad \text{ pro } B,\ C,\ D \text{ et}$$
$$a'b',\ a'c',\ a'd' \text{ pro } B',\ C',\ D'.$$

In aequatione:

$$\alpha rr' + \beta r + \gamma r' + \delta = 0$$

r rationem anharmonicam trium certarum rectarum (ab, ac, ad) significat ac tangentis T in puncto a ad quamlibet sectionem conicam primi fascis ductae, r' idem fere valet.

Sin vero ex puncto m sectionis conicae (hic dicimus eam sectionem conicam, quam recta T in puncto a tangit), quatuor rectae per quatuor certa puncta sectionis conicae (hic a, b, c, d) ducuntur, ratio anharmonica quatuor rectarum, ut notum, constans est; itaque hoc quidem casu:

$$\frac{\sin(amb)}{\sin(amc)} : \frac{\sin(dmb)}{\sin(dmc)} = \text{constans.}$$

Si punctum m ad punctum a infinite propius accedit, in tangente T in puncto a ducta situm est, atque ultima aequatio transit in:

$$\frac{\sin(T,\ ab)}{\sin(T,\ ac)} : \frac{\sin(dab)}{\sin(dac)} = \text{constans} = r.$$

Pro respondente sectione conica secundi fascis item:

$$\frac{\sin(a'mb')}{\sin(a'mc')} : \frac{\sin(d'mb')}{\sin(d'mc')} = \frac{\sin(T',\ a'b')}{\sin(T',\ a'c')} : \frac{\sin(d'a'b')}{\sin(d'a'c')} = r'.$$

Quatuor puncta intersectionis harum duarum sectionum conicarum quaternos pares valores pro r et r' praebent, qui aequationi: $\alpha rr' + \beta r + \gamma r' + \delta = 0$ satisfaciunt.

Si igitur duo fasces sectionum conicarum in $(abcd)$ et $(a'b'c'd')$ inter se proiectivi sunt, haec aequatio valet pro quoque puncto intersectionis duarum sibi respondentium sectionum conicarum, ergo pro quoque puncto curvae quarti gradus ipsis effectae. Idcirco possumus statuere hoc

Theorema I. Si punctum m ita movetur, ut rationes anharmonicae r et r' quatuor radiorum, quos ex illo ad duo systemata quatuor datorum punctorum ducere possumus, aequationi satisfaciant formae huiusce:

$$\alpha rr' + \beta r + \gamma r' + \delta = 0$$

locus, quem illud punctum describit, est curva quarti gradus quae octo data puncta transit. Inversione huius enunciati accipiemus hocce

Theorema II. Si ad quatuor puncta ad libitum electa $(abcd)$ curvae quarti ordinis unum systema punctorum contrariorum $(a'b'c'd')$ constituitur omne punctum huius curvae tali gaudet natura, ut si ex illo radii per puncta $(abcd)$ et $(a'b'c'd')$ ducuntur, utraqne ratio anharmonica r et r^I quaternis radiis definita aequationi formae:

$$\alpha rr' + \beta r + \gamma r' + \delta = 0$$

satisfaciat.

Quibus theorematibus compositis hoc sequitur

Theorema III. Respectu duorum systematum punctorum contrariorum $(abcd)$ et $(a'b'c'd')$ curvae quarti gradus puncta ipsius curvae in copulationes plane definitas quaternorum punctorum dividuntur; quibus quidem copulationibus id est proprium, ut quaeque uno eius puncto definiatur atque ut duae copulationes puncta contraria $(abcd)$ et $(a'b'c'd')$ constituant; ergo puncta huius curvae involutionem quarti gradus efficiunt, quam ut fiat contraria involutioni in linea recta, involutionem obliquam appellare liceat.

Nota. Iam hic etiam attingatur omnino in curva quadam $C(n)$, $n$ti ordinis puncta involutorie copulari posse, idque toties quoties curva proposita $C(n)$ fascibus curvarum ordinis inferioris quam (n) generari possit; itaque si curvam quarti gradus generatam fasce radiorum et fasce curvarum tertii ordinis spectemus puncta illius copulationes ternorum punctorum efficere possunt.

§. 8.

Componatur curva quarti cum curva tertii ordinis.

Iam §. 1 commemoratum, curvam quarti gradus fasce radiorum fasceque curvarum tertii gradus illi proiectivo generari posse. Qua ex re simile nobis exsisteret problema definiendi datis quatuordecim punctis decem puncta basis illorum fascium ita, ut curva quarti gradus ipsis effecta quatuordecim data puncta transgrederetur. Solutionem huius quaestionis non subimus remittimusque ad (comptes rendus 1857 Chasles), attingentes hic modo,

octo punctorum basis ad libitum ex quatuordecim datis punctis eligi posse, duo vero esse constituenda. Spectantes ea, quae in Cr. pag. 78 dicuntur statuimus haecce:

Theorema I. Quodsi curva quarti gradus transversali L persecatur et tribus punctis intersectionis aliisque sex punctis curvae quarti gradus ad arbitrium electis, curvam tertii gradus imponimus curva quarti gradus, in tribus etiam firmis punctis illa intersecatur, quae cum sex ad libitum delectis puncta basis tertii ordinis efficiunt; quaeque curvarum huius fascis curvam quarti gradus tribus in punctis intercidit in recta quadam positis, quae quidem quartum punctum intersectionis transversalis L cum curva quarti gradus transit formatque hic fascem radiorum, qui fasci tertii ordinis est proiectivus, vel:

Theorema II. Si tria punctorum duodecim intersectionis curvae quarti cum curva tertii ordinis in linea recta sunt posita, novem ceteris fascis curvarum tertii ordinis imponi potest.

Curva quaelibet tertii ordinis, quam tribus punctis intersectionis transversalis L cum curva quarti ordinis iniecimus, systemate trium rectarum substitui potest, quae item curvam novem in punctis secant, aequa proprietate gaudentibus. Quodsi transversalis L tangente inflexionali curvae quarti gradus substituatur, sequitur

Theorema III. Si puncto inflexionali curvae quarti gradus et sex aliis ad libitum exhibitis punctis eiusdem curvae curva tertii gradus imponitur eadem tangente in puncto inflexionali utens, curvam quarti gradus in tribus aliis punctis intersecat, quae cum sex ad libitum electis basin curvarum fascis tertii ordinis efficiunt; in puncto intersectionis tangentis inflexionalis cum curva quarti

gradus exoritur fascis radiorum, qui primo proiectivus cum illo curvam propositam quarti gradus generat.

Theorema IV. Si tribus punctis inflexionalibus curvae quarti gradus curva tertii iisdem tangentibus inflexionalibus utens imponitur, curvam quarti gradus in tribus etiam punctis incidit communisque est tribus fascibus, qui tria haec puncta binaque puncta inflexionalia cum eorum tangentibus inflexionalibus puncta basis habent; fascis radiorum uni ex his tribus fascibus proiectivus eiusque curvis definitus centrum habet in puncto intersectionis curvae quarti gradus cum tertia inflexionali tangente.

§. 9.

Varia theoremata de curvis quarti gradus.

Theorema cl. Carnot in curvas quarti gradus translatum hoc est:

Theorema I. Si curva quarti gradus latera trianguli (abc) in punctis $(\alpha\alpha'\alpha''\alpha''')$, $(\beta\beta'\beta''\beta''')$, $(\gamma\gamma'\gamma''\gamma''')$ intersecat, inter segmenta haec habet locum aequatio:

$$\frac{\alpha b.\alpha' b.\alpha'' b.\alpha''' b.\beta c.\beta' c.\beta'' c.\beta''' c.\gamma a.\gamma' a.\gamma'' a.\gamma''' a.}{\alpha c.\alpha' c.\alpha'' c.\alpha''' c.\beta a.\beta' a.\beta'' a.\beta''' a.\gamma b.\gamma' b.\gamma'' b.\gamma''' b} = 1.$$

Iacentibus iam punctis $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ in sectione quadam conica ultima aequatio transit in:

$$\frac{\alpha'' b.\alpha''' b.\beta'' c.\beta''' c.\gamma'' a.\gamma''' a.}{\alpha'' c.\alpha''' c.\beta'' a.\beta''' a.\gamma'' b.\gamma''' b} = 1.$$

id est: puncta $\alpha''\alpha'''$, $\beta''\beta'''$, $\gamma''\gamma'''$ item in sectione conica sunt posita; quamobrem

Theorema II. Si curva quarti gradus latera trianguli intersecat, ita ut bina puncta intersectionis unius-

cuiusque lateris in sectione conica sint posita, sex alia in altera sectione conica iacent.

Atqui prima sectio conica etiam systema duarum concidentium rectarum esse potest, unde

Theorema III. Si curva quarti gradus intersecatur transversali atque in quatuor punctis intersectionis tangentes ad curvam ducuntur, octo alia puncta intersectionis harum tangentium cum curva posita sunt in quatuor sectionibus conicis, quarum binae quatuor communia puncta curvae propria continent.

Nota. Quodsi in puncto p curvae quarti gradus tangens (t) ducitur et in duobus aliis punctis intersectionis huius tangentis p' et p'' duae aliae tangentes t' et t'', nulla quatuor sectionum conicarum, tangente (t) transversali accepta, revera exsistit — eaeque tali casu ex tangentibus in punctis p, p' et p'' componendae sunt, tangente in puncto p dupliciter numerata.

Continuatio. Si porro puncta $(\alpha\beta\gamma)$ in recta quadam sunt posita, ex aequatione supra prolata fit:

$$\frac{\alpha'b.\alpha''b.\alpha'''b.\beta'c.\beta''c.\beta'''c.\gamma'\alpha.\gamma''a.\gamma'''a.}{\alpha'c.\alpha''c.\alpha'''c.\beta'a.\beta''a.\beta'''a.\gamma'b.\gamma''b.\gamma'''b} = 1.$$

id est: puncta $(\alpha'\alpha''\alpha''')$, $(\beta'\beta''\beta''')$, $(\gamma'\gamma''\gamma''')$ iacent in curva tertii gradus, quod esset ipsum triangulum nisi his punctis nulla alia curva tertii ordinis imponi posset (vid. Cap. V); ex novem illis punctis, tribus iterum in recta quadam iacentibus, alia sex, quae supersunt, in conica sectione iacent; quum igitur prima puncta $(\alpha\beta\gamma)$ in punctum inflexionale curvae quarti gradus coniiciuntur, efficitur

Theorema IV. Si per punctum inflexionale curvae quarti gradus tres transversales ita possunt duci, ut tria

ex punctis intersectionis cum curva quarti gradus in recta quadam iaceant, sex alia in curva secundi gradus posita.

Theorema V. Si per punctum p curvae quarti gradus tres transversales ita duci possunt, ut sex punctorum intersectionis illarum cum curva quarti gradus curva secundi gradus transeat, per tria cetera puncta intersectionis altera sectio conica transgreditur, quae cum curva quarti gradus in puncto p tactum trium punctorum ineat.

Sententia cl. Cayley (Cr. Nr. 44) adhibita in curvas quarti gradus praebet

Theorema VI. Quum in punctis, in quibus curva quarti gradus curva $n$ti gradus intersecatur, tangentes ad primam curvam ponimus, illae curvam quarti gradus in $8n$ punctis incidunt, quae omnia in curva $2n$ti gradus posita.

Theorema VII. Si in punctis, in quibus curva quarti gradus transversali intersecatur, tangentes ad hanc curvam ducuntur, octo cetera puncta intersectionis in curva secundi gradus posita.

Hoc theoremate cum theoremate III. comparato sequitur

Theorema VIII. Tangentes in quatuor punctis intersectionis transversalis cuiusdam cum curva quarti gradus quatuor sectiones conicas constituunt; quatuor puncta, quae hae curvae inter se binae et cum curva quarti gradus habent communia, omnia in quinta sectione conica sunt posita.

Si iam curva intersecans est sectio conica, sedecim puncta intersectionis tangentium in secunda curva quarti gradus iacent; qua quidem re indicatum, qua ratione in curva proposita quarti gradus talia sedecim puncta con-

stituantur, quibus curvarum fascis quarti ordinis imponi possit.

Quodsi iam duo puncta intersectionis conicae sectionis cum curva quarti gradus in unum concidunt, id est contactus si habet locum, curvae fascis, punctis intersectionis tangentium iniecti, curvam propositam et ipsas inter se in duobus diversis punctis tangunt; quum autem sectio conica curvam quarti gradus quatuor in diversis punctis tangat, orta puncta intersectionis tangentium in altera curva quarti gradus iacent, ergoque etiam in curvis eiusdem ordinis infinite multis, quae omnes primam curvam et se ipsas in his punctis tangunt.

Item sequitur ex eadem sententia cl. Cayley

Theorema IX. Sectiones conicae, quae in punctis intersectionis curvae $n$ti gradus cum curva quarti gradus cum hac contactum quinque punctorum ineunt, eandem etiam in $12n$ punctis intersecant, quae in curva ordinis $3n$ti iacent.

Theorema X. Sectiones conicae, quae in punctis intersectionis cuiusdam transversalis cum curva quarti ordinis cum hac contactum quinque punctorum ineunt, eandem etiam in duodecim punctis intersecant, quae in curva tertii ordinis iacent.

II.

Relationes polares respectu curvae quarti gradus.

Inter curvas quarti gradus generali vi quae hac disquisitione aguntur nullo modo sublata, eam curvam cur-

vam fundamentalem exhibeamus, cui nulla sunt puncta multiplicia. Qua ex ratione sequitur, esse illam duodecimae classis (Cr. Nr. 70) habereque (vid. Nr. 100 ibid.) viginti quatuor puncta inflexionalia et viginti octo tangentes duplices.

a) Recta, conica, cubica polaris puncti. Quodque punctum polus est trium polarium, rectae, conicae et cubicae polaris. Duo puncta, quoniam toto systemate polarium cubicarum rete tertii ordinis efficitur una solum cubica polaris transgreditur; omnes cubicae polares unum punctum transeuntes octo alia etiam habent puncta communia, polique earum in recta positi, quae est recta polaris uniuscuiusque novem punctorum.

Quamobrem omnis recta novem habet polos, omnesque rectae idem punctum transeuntes polis utuntur, qui in curva tertii gradus, cubica polari huius puncti iacent.

Omne punctum conica utitur polari, vice versa omnis sectio conica polo gaudet, si polares conicae eius punctorum uno in puncto intersecantur.

Curva fundamentalis duodecimae classis accepta est, id est ex puncto quolibet o plani duodecim tangentes ad curvam propositam quarti gradus duci possunt punctaque contactus sunt puncta intersectionis primae polaris puncti (o) cum curva fundamentali $C_{(4)}$. Quodsi o est punctum curvae fundamentalis in hoc puncto omnibus eius tribus polaribus tangitur; ergo ex puncto curvae ipsius decem modo tangentes ad eam duci possunt. Quum i est punctum inflexionale curvae fundamentalis omnes tres polares illius cum curva contactum trium punctorum ineunt; conica igitur polaris est ipsa tangens inflexionalis et alia recta, cubica polaris puncto i item puncto inflexionali gaudet. Atqui puncta tangentis in-

flexionalis primas polares curvas tertii ordinis habent, quae datam curvam fundamentalem in puncto inflexionali (i) tangunt, quare sequitur

Theorema I. Sunt in reti geometrico primarum polarium respectu curvae fundamentalis quarti ordinis viginti quatuor curvae, quae polos in curva proposita habentes cum illa in duobus diversis punctis contactum ineant.

Punctis intersectionis ipsarum tangentium inflexionalium spectatis, sequitur

Theorema II. Sunt respectu curvae datae $C(_4)$ ducentae septuaginta sex curvae tertii gradus, quae primae polares totidem punctorum in curva $C(_4)$ non positorum illam duobus in punctis inflexionalibus tangunt.

b) Conicae polares duorum punctorum mixtae. Quodsi sunt o et o' duo puncta, prima polaris puncti o respectu primae polaris puncti o' et prima polaris puncti o' respectu primae polaris puncti o una eademque est sectio conica. Puncta, in quibus haec curva primas polares punctorum o et o' secat, sunt puncta contactus tangentium ex puncto o' et o ad illas curvas ductarum.

Theorema III. Si ex puncto o tangentes ad primam polarem alterius puncti o' et ex puncto o' tangentes ad primam polarem puncti o ducuntur, puncta contactus sectionem conicam constituunt, quae est polaris secunda mixta punctorum o et o'.

Polaris secunda mixta punctorum o et o' (secundum Cr. Nr. 123) est locus polorum, pro quorum conicis polaribus puncta o et o' poli sunt coniugati. Puncto a puncto huius curvae accepto, conica eius polaris rectam (oo') duobus in punctis intersecat; conicae polares purae horum punctorum intersectionis in quatuor punctis inter-

secantur, quae in polari mixta punctorum *o* et *o'* iacere oportet, quippe quorum conicae polares purae rectam (*oo'*) in iisdem punctis incidant, quibus segmentum *oo'* harmonice secatur. Omnes iam curvae quatuor punctis intersectionis effecti fascis sectionum conicarum ea inter se relatione utuntur, ut conicae polares mixtae parium punctorum rectae *oo'* exsistant, quae respectu punctorum intersectionis conicae polaris purae puncti (*a*) cum recta *oo'* involutorie sunt copulata.

Nota. Tres sectiones conicae huius fascis ex systemate duarum rectarum constant, ergo sunt curvae, quibus duplicia huius fascis respondeant puncta; omnes porro polares conicae purae et mixtae, quarum poli in recta (*oo'*) sunt siti, rete secundi gradus efficiunt (vid. Cr. pag. 196). Operae pretium esset et curvam Iacobianam sive Hessianam huius retis et eam curvam tertii ordinis disquirere, respectu cuius (vid. Cr. pag. 265) rete hoc curvarum secundi gradus rete primarum polarium appareat; sed illam disquisitionem iam in aliud tempus reservamus.

§. 2.

Curva Hessiana et Steineriana curvae quarti gradus.

Variae definitiones harum curvarum, quae in Cremonae theoria generali ponuntur sunt haecce:

a) Curva Hessiana est locus punctorum duplicium retis cubicarum polarium.

b) Locus punctorum, quorum conicae polares *e* systemate duarum rectarum constant.

c) Efficit cum curva fundamentali quarti gradus locum punctorum, quorum duae indicatrices in unam collabuntur.

d) Est locus polorum, qui cum uno ex polis sibi coniunctis coincidunt.

e) Eadem est pro $n = 4$ curva sexti ordinis.

a) Curva Steineriana est locus punctorum intersectionis parium rectarum, quae conicas polares puncti efficiunt.

b) Eadem est involvens rectae, quae duos habet polos concidentes et curva ordinis duodecimi, classis duodevicesimae pro fundamentali curva quarti gradus.

Ex singularitatibus curvae Steinerianae primum nonnullas relationes deducamus, quae inter curvas retis primarum polarium respectu curvae fundamentalis $C_{(4)}$ intercedunt. Quaeque tangens curvae Steinerianae ex definitione prolata est recta polaris puncti curvae Hessianae; fascis cubicarum polarium, huic tangenti respondens, in puncto respondente curvae Hessianae curvam cum puncto duplici habet, quum ceterae curvae fascis in hoc puncto inter se tangantur. Quodsi (t) est tangens duplex curvae Steinerianae, cubicas polares punctorum illius tangentis secundum ea, quae antecesserunt, in duobus diversis punctis curvae Hessianae contactum inire oportet; punctis contactus tangentis (t) infinite propius accedentibus tangens (t) fit tangens inflexionalis duoque puncta contactus diversa fascis cubicarum polarium respondentis infinite propius sibi accedunt, id est curvae fascis contactum trium punctorum inter se ineunt. Atqui Steineriana pro $n = 4$ octoginta quatuor tangentes duplices, triginta tangentes inflexionales habet; ergo sequitur

Theorema IV. Sunt in reti cubicarum polarium respectu curvae fundamentalis quarti gradus octoginta quatuor fasces curvarum tertii ordinis, quorum curvae in duobus diversis punctis inter se tanguntur.

Theorema V. Sunt in reti primarum polarium re-

spectu curvae quarti gradus triginta fasces, quorum tria puncta basis infinite propius sibi accedunt.

Porro ex definitione data puncto cuique Steinerianae cubica polaris cum puncto duplici, quod in curva Hessiana est positum; ergo puncto duplici Steinerianae cubicam polarem respondere oportet cum duobus punctis duplicibus; tangentes Steinerianae in puncto duplici polares sunt rectae punctorum duplicium respondentis cubicae polaris; quodsi hae tangentes in unam concidunt, id est si punctum duplex Steinerianae in cuspidem vertitur etiam ex duobus fascibus tangentibus in puncto duplici Steinerianae respondentibus unus fit fascis duoque puncta duplicia curvae iis communis in unum collabuntur cuspideque substituuntur, quod idem atque duo puncta duplicia valet; quum autem Steineriana pro $n=4$ viginti quatuor cuspides, viginti et unum punctum duplex habeat, statuere possumus.

T h e o r e m a VI. Sunt in reti polarium cubicarum respectu curvae fundamentalis quarti ordinis viginti quatuor curvae tertii ordinis cum cuspide, viginti et una curva cum duobus punctis duplicibus.

Quum autem curva tertii ordinis plus quam unum punctum duplex habeat necesse est, non est possibile eam curvam simplicem id est ex curvis ordinis inferioris non compositam esse. Duobus enim punctis duplicibus recta colligatis haec cum curva tertii gradus quatuor puncta haberet communia, id quod fieri non potest. Quamobrem illae viginti et una curva omnino ex sectione conica et recta quadam constant.

Quod si p est polus unius ex viginti polaribus et una cum duobus punctis duplicibus, conica polaris eius puncti respectu curvae fundamentalis quarti gradus et conica

polaris eius puncti respectu suae cubicae polaris est una eademque curva secundi gradus.

Polaris autem cubica puncti p constat ex sectione conica et recta L, quarum puncta intersectionis o et o' puncta duplicia efficiunt. Si nunc t et t' tangentes conicae sectionis in punctis o et o' significant, puncto p cum punctis o et o' colligato conicam polarem puncti p puncta duplicia o et o' transire scimus, eamque esse sectionem conicam, quae et quartum radium harmonicum ad (po, L, t) et quartum radium harmonicum ad (po', L', t') tangit, qui quidem radii harmonici uno in puncto intersecantur, qui ut facile intelligitur, polus est rectae L respectu conicae polaris puncti p.

Theorema VII. Viginti polares cubicae et una cum duobus punctis duplicibus retis cubicarum polarium e sectione conica rectaque quadam L constat, quae respectu conicarum polarium respondentium viginti polorum et unius est recta polaris puncti, quod cum punctis o et o' colligatum fasces (po, L, t) et $(po' L, t')$ faciat harmonicos.

Ad polares cubicas viginti quatuor cuspide o' praeditas, quibus totidem cuspides o curvae Steinerianae respondent, adhibeamus theorema in Cr. Nr. 79 positum. Cubicae polares hoc theoremate comprehensae sunt respectu curvae fundamentalis quarti gradus primae polares; polaribus igitur primis cuspidum curvae Steinerianae totidem aliae primae polares cum polis in curva Hessiana positis respondent, quae compositae cum primis praebent

Theorema VIII. Sunt respectu curvae fundamentalis quarti gradus quatuor et viginti eiusmodi paria punctorum sibi respondentium curvae Hessianae et Steine-

rianae, ut eorum polaris conica mixta systema sit duarum rectarum concidentium, punctum o' transeat et hic conicam polarem puram puncti coniugati o tangat.

§. 3.

Curva Hessiana cum sua curva fundamentali quatuor et viginti puncta intersectionis praebet; quibus punctis totidem polares rectas respondere oportet, quae Steinerianam tangant habeantque duos polos coniunctos. Quum vero tangentes inflexionales duobus polis coniunctis in puncto ipso inflexionali gaudeant, hoc punctum punctum curvae Hessianae esse oportet; quum porro tangentes inflexionales polares sint punctorum inflexionalium sequitur ipsas curvam Steinerianam tangere, quae quum exceptis tangentibus inflexionalibus centum nonaginta duas tangentes cum curva fundamentali habeant communes efficitur.

Theorema IX. Curva quarti gradus sine punctis multiplicibus accepta centum nonaginta duas habet tangentes, quae duobus coniunctis polis in ipsa non sitis utantur.

Puncta curvae Steinerianae et Hessianae duas proiectivas series punctorum obliquas efficiunt, quoniam uni puncto alterius curvae unum solum punctum alterius respondeat et vice versa.

Quocirca involvens rectarum duo puncta respondentia colligantium est curva classis $(12 + 6) = 18$tae, quae cum curva fundamentali $C_{(4)}$ ducentas sedecim tangentes habet communes.

Unde:

Theorema X. Curva quarti gradus sine punctis multiplicibus accepta ducentas sedecim habet tangentes,

quae duo puncta respondentia eius curvae Steinerianae et Hessianae transeant.

N o t a. Tangentes inflexionales curvae propositae hoc numero comprehensae.

§. 4.

Iam nobis restat, ut respectu curvae fundamentalis quarti gradus curvarum polares disquiramus; quo in genere quum in theoria generali sententiae positae explicataeque nulla relatione cum curva fundamentali contineantur, difficile sit, ut opinamur, specialia quaedam curvae quarti gradus inde deducere.

Curva quaeque ordinis cuiuslibet respectu curvae quarti gradus tres habet polares, involventes cubicarum, conicarum rectarumque polarium eius punctorum; si eas involventes locos definiamus, efficiunt continuam consecutionem punctorum, quorum polares polaribus punctorum curvae propositae complementariae illam curvam tangunt. Ultima harum polarium curvam Steinerianam in punctis tangit, quae punctis intersectionis curvae datae cum Hessiana respondent. (vid. Cr. Nr. 122).

Recta quaelibet R duobus modo polaribus utitur, quum eius prima polaris sit $o$ti gradus constetque ex eius novem polis. Curva Hessiana eadem relatione cum involventibus conicarum polarium continetur, atque Steineriana cum involvente rectarum polarium punctorum cuiuslibet curvae, quum illa involvente omnibus in punctis tangatur, quae punctis intersectionis curvae propositae cum curva Steinariana respondent. (vid. Cr. pag. 202). Ordines polarium curvae datae $m$ti gradus sine punctis multiplicibus respectu curvae fundamentalis quarti gradus accipiemus deinde hosce:

$$3m(m-1)$$
$$2m(m+1)$$
$$m(m+3)$$

Unde elucet, utramque polarem rectae cuiuslibet eiusdem, quarti, esse ordinis gaudereque tali proprietate, ut altera curvam Hessianam altera curvam Steinerianam in punctis tangat, quae punctis intersectionis rectae cum Steineriana aut Hessiana respondent, porro habet utraque curva sedecim puncta intersectionis communia.

Theorema XI. Sunt respectu curvae fundamentalis quarti gradus pro quaque recta sedecim puncta, quorum conica et cubica polari simul tangatur.

VITA.

Natus sum Ignatius Paczkowski ante diem VII Cal. Novbr. anni MDCCCXL Camioncae pago Magni Ducatus Posnaniensis patre Nicolao, matre Maria e gente Domek. Fidei additus sum catholicae. Primis litterarum elementis imbutus primum gymnasium Coniciense, quod tum directore Brueggemann florebat, octo annos deinde Tremesnense per sex menses frequentavi, ubi maturitatis testimonium adeptus sum. Anno LXII auctumno almam Gryphiam migravi, ut rebus mathematicis operam navarem. Summo animi dolore rebus familiaribus post primum semestre studia omittere coactus sum et spatio anni intermisso iterum Gryphiam petii, ubi ab Ill. Bardeleben t. t. Rectore Magnifico civibus academicis adscriptus apud Ill. Baier, philosophorum ordinis decanum maxime spectabilem nomen professus sum. Per sex semestria audivi disserentes viros Ill. George, de Feilitzsch, Grunert, Koenigsberger, beat. Hasert, Limpricht, Jessen, Buechler, Schmitz, Susemihl; per quattuor semestria seminario mathematico interfui. Viris illis omnibus optime de me meritis gratias ago quam maximas; in primis autem Tibi Ill. Koenigsberger, qui quantum studia mea adiuveris, pio gratoque animo semper tenebo.

SENTENTIAE CONTROVERSAE.

I.

Dei notionem systema Leibnitii non complectitur.

II.

Inter curvas retis communi puncto utentes non una curva sed fascis est curvarum, quae hoc puncto tamquam duplici gaudeant.

III.

Theoria hydracidorum praeferenda est theoriae vetustiori.

IV.

Spatium inter atomos corporis consistens ratione ipsarum habita non infinite parvum est.